6.2 Konstruktion und Grundeigenschaften

In diesem Kapitel rechnen wir in einem beliebigen kommutativen unitären Ring R.

Definition: Die *Determinante* einer $n \times n$-Matrix $A = \left(a_{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ ist

S_n = Bijektionen $\{1, .., n\} \circlearrowleft$

(n! · n Operationen)

$$\boxed{\det(A) \;:=\; \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma i}\right).}$$

Beispiel: Explizite Formeln für $n = 0, 1, 2, 3$.

$n = 0$: $\det(A) = 1$

$n = 1$: $A = \boxed{a_{11}} \Rightarrow \det(A) = a_{11}$

$n = 2$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $+1$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ -1 $\quad$ $\begin{pmatrix} + & - \\ & \end{pmatrix}$

$n = 3$:

$\overset{+1}{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}}$ $\overset{-1}{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}}$ $\overset{-1}{\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}}$

$\underset{+1}{\begin{pmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{pmatrix}}$ $\underset{+1}{\begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}}$ $\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}_{-1}$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & a & b & c \\ d & e & f & d & e & f \\ g & h & i & g & h & i \end{array}$$

Bemerkung: Halten wir alle Zeilen von A ausser der i-ten Zeile fest, so ist $\det(A)$ eine lineare Abbildung der i-ten Zeile. Dasselbe gilt für Spalten anstelle von Zeilen.

Proposition: Es gilt $\det(A^T) = \det(A)$.

Bew.: $$\det(A^T) = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma i, i} = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma^{-1} j} = \sum_{\rho\in S_n} \underbrace{\mathrm{sgn}(\rho^{-1})}_{=\ \mathrm{sgn}(\rho)} \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{j,\rho j} .$$

$$= \det(A)$$

qed.

$A^T = (a_{ji})_{i,j}$

$\sigma: \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ bijektiv. $\left|\ \begin{matrix} j = \sigma i \\ i = \sigma^{-1} j \end{matrix}\ \right|\ \begin{matrix} \rho = \sigma^{-1} \\ \sigma = \rho^{-1} \end{matrix}$

Proposition: Für jede Permutation $\sigma \in S_n$ gilt $\det(P_\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma)$.

Bew.: $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma j})_{i,j}$ $\qquad \delta_{i,\sigma j}\big|_{j=\rho i} = \delta_{i,\sigma\rho i}$

$$\Rightarrow \det(P_\sigma) = \sum_{\rho\in S_n} \mathrm{sgn}(\rho)\cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \delta_{i,\sigma\rho i}}_{=\begin{cases} 1 & \text{falls } \sigma\rho = id \iff \rho = \sigma^{-1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}} = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})\cdot 1 = \mathrm{sgn}(\sigma).$$

qed

Proposition: Für jede obere oder untere Dreiecksmatrix $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ gilt

$$\boxed{\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.}$$

Folge: Insbesondere gilt $\det(I_n) = 1$.

Bew.: Sei $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$.

$\Rightarrow \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma i} = \underbrace{\operatorname{sgn}(\mathrm{id})}_{=1} \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

$\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma i} = 0$ falls $\exists i: i > \sigma i$. d.h. falls $\sigma \neq \mathrm{id}$

qed.

Proposition: Für jede Blockdreiecksmatrix der Form

$$\boxed{A = \left(\begin{array}{c|c} A' & B \\ \hline O & A'' \end{array}\right) \quad \text{oder} \quad \left(\begin{array}{c|c} A' & O \\ \hline B' & A'' \end{array}\right)}$$

mit quadratischen Matrizen A' und A'' und der jeweiligen Nullmatrix O gilt

$$\boxed{\det(A) = \det(A') \cdot \det(A'').}$$

Proposition: Hat A zwei gleiche Zeilen oder zwei gleiche Spalten, so gilt $\det(A) = 0$.

Bew.: Seien $1 \le \mu < \nu \le n$ so dass $\forall i: a_{i\mu} = a_{i\nu}$.

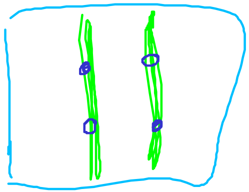
$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma i}.$$

Zu jedem $\sigma \in S_n$ assoziiere $\sigma' : \begin{cases} j \mapsto \sigma j & \sigma j \neq \mu, \nu \\ j \mapsto \nu & \sigma j = \mu \\ j \mapsto \mu & \sigma j = \nu \end{cases}$

d.h. $\sigma' = (\text{Transposition}) \cdot \sigma$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma i} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma' i}$$

und $\operatorname{sgn}(\sigma') = -\operatorname{sgn}(\sigma)$



Die Terme heben sich alle paarweise weg.

qed.

Satz: Für je zwei $n \times n$-Matrizen A und B gilt $\boxed{\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).}$

Bew.:

$$A = (a_{ij})_{i,j} \qquad B = (b_{jk})_{j,k}$$

$$AB = \Big(\sum_j a_{ij} \cdot b_{jk} \Big)_{i,k}$$

$$\Rightarrow \det(AB) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{j,\sigma i} \Big)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \sum_{j_1, \dots, j_n = 1}^{n} \prod_{i=1}^{n} \big(a_{i,j_i} \cdot b_{j_i,\sigma i} \big)$$

$$= \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,j_i}\right) \cdot \underbrace{\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot \prod_{i=1}^{n} b_{j_i,\sigma i}}$$

$$= \det\left(\left(b_{j_i,k}\right)_{i,k} \right)$$

Falls $\{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$, $i \mapsto j_i$ nicht injektiv ist, hat diese Matrix zwei gleiche Zeilen $\Rightarrow \det = 0$.

Falls injektiv, ist dies eine Permutation: $\tau i = j_i$.

$$= \sum_{\tau\in S_n} \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,\tau i}\right) \cdot \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} b_{\tau i,\sigma i}$$

$$\prod_{i=1}^{n} b_{\tau i,\sigma i} = \prod_{j=1}^{n} b_{j,\sigma\tau^{-1}j}$$

$\tau i = j$

$\Rightarrow \sigma i = \sigma\tau^{-1} j$

$$= \sum_{\sigma,\tau\in S_n} \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,\tau i}\right) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \left(\prod_{j=1}^{n} b_{j,\sigma\tau^{-1}j}\right)$$

(σ,τ) in S_n.

$(\tau, \underbrace{\sigma\tau^{-1}}_{\rho})$ ...

$\sigma\tau^{-1} = \rho \Rightarrow \sigma = \rho\tau \Rightarrow \tau = \rho^{-1}\sigma$.

$$= \sum_{\tau,\rho\in S_n} \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,\tau i}\right) \cdot \operatorname{sgn}(\rho\tau) \cdot \left(\prod_{j=1}^{n} b_{j,\rho j}\right) = \underbrace{\sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,\tau i}\right)} \cdot \underbrace{\sum_{\rho\in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) \left(\prod_{j=1}^{n} b_{j,\rho j}\right)}$$

$\operatorname{sgn}(\rho\tau) = \operatorname{sgn}(\rho)\cdot\operatorname{sgn}(\tau)$

$\det(A) \cdot \det(B)$ qed.

6.3 Berechnung der Determinante

Proposition: Die Determinante verhält sich unter elementaren Zeilenoperationen wie folgt: Entsteht A' aus A durch ...

(a) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen, so gilt $\det(A') = \det(A)$.

(b) Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\lambda \in R$, so gilt $\det(A') = \lambda \cdot \det(A)$.

(c) Vertauschen zweier Zeilen, so gilt $\det(A') = -\det(A)$.

Die entsprechenden Aussagen gelten für elementare Spaltenoperationen.

Über einem Körper lässt sich die Determinante daher mit Gauss-Elimination berechnen.

$O(n^3)$ Operationen.

Bew.: Jede solche Operation bildet A auf TA ab für T wie folgt.

$\Rightarrow \det(TA) = \det(T) \cdot \det(A)$.

(a) $T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ \lambda & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T) = 1$ da Dreiecksmatrix.

(b) $T = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T) = \lambda$ " "

(c) $T = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & 1 \ddots 1 & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = P_\sigma$ für Transposition σ.

$\Rightarrow \det(T) = -1$.

qed.

Beispiel: Ist eine Zeile oder Spalte von A eine Linearkombination der übrigen, so gilt $\det(A) = 0$.

Bew.: Nach Operationen vom Typ (a) ist eine Zeile oder Spalte Null. $\Rightarrow \det = 0$. qed.

Beispiel: Für beliebige $a_1, \ldots, a_n \in R$ hat die $n \times n$-Matrix

$$A := \left(a_i^{j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

die *Vandermonde-Determinante*

$$\boxed{\det(A) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).}$$

Bew.: $n = 0 \Rightarrow \det(A) = 1$ ✓

$n = 1 \Rightarrow \det(A) = \det(1) = 1$ ✓

$n > 1 \Rightarrow \det(A) =$

Subtrahiere a_1 mal die Spalte $n-1$ von der Spalte n.

" a_1 . . . . . $n-2$ - - - → $n-1$ (a)

⋮ ⋮ 1 . . . 2

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & \ldots & a_2^{n-1} - a_1 \cdot a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & \ldots & a_n^{n-1} - a_1 \cdot a_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

Subtrahiere die 1. Zeile von jeder anderen. (a)

$$= \det \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (a_2-a_1) & \cdots & (a_2-a_1)\cdot a_2^{n-2} \\ \vdots & & & \\ 0 & (a_n-a_1) & \cdots & (a_n-a_1)\cdot a_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} (a_2-a_1) & \cdots & (a_2-a_1)a_2^{n-2} \\ \vdots & & \vdots \\ (a_n-a_1) & \cdots & (a_n-a_1)a_n^{n-2} \end{pmatrix} \cdot \det(1)$$

(4)

$$= \prod_{i=2}^{n}(a_i-a_1) \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & & & \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-2} \end{pmatrix}}_{\overset{\text{IV.}}{=} \prod_{2 \le i < j \le n}(a_j-a_i)}$$

IV.

$$= \prod_{j=2}^{n}(a_j-a_1) \cdot \prod_{2 \le i < j \le n}(a_j-a_i) = \prod_{1 \le i < j \le n}(a_j-a_i).$$

<u>qed</u>.

Bsp.:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad -3 \quad = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 14 & -8 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$+3$

-2

$$= \det\begin{pmatrix} 14 & -8 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = 14 \cdot 1 - (-8) \cdot 6 = 14 + 48 = 62.$$